Stochastic Processes and their Applications 49 (1994) 57–64
North-Holland

Dernier instant de passage pour l'intégrale du mouvement brownien

Aimé Lachal

Université Claude Bernard – Lyon I, Institut de Mathématiques et Informatique, Villeurbanne, France

Received 30 December 1991
Revised 1 June 1992

Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ le mouvement brownien linéaire démarrant de l'origine, $\tau_{a,T}^- = \max\{t\in[0,T]: \int_0^t B_s\,\mathrm{d}s + x + ty = a\}$ et $\tau_{a,T}^+ = \min\{t\geqslant T: \int_0^t B_s\,\mathrm{d}s + x + ty = a\}$. Dans cette note nous déterminons la loi du vecteur aléatoire $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^\pm})$.

1. Introduction

Soient $(B_t)_{t\geqslant 0}$ le mouvement brownien linéaire démarrant de y, $X_t = \int_0^t B_s\,\mathrm{d}s + x$ sa primitive démarrant de x, et $U_t = X_t$, $t \geqslant 0$, le processus bidimensionnel associé, démarrant du point (x, y).

Le processus $(U_t)_{t\geqslant 0}$ a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs, et intervient dans divers domaines des mathématiques appliquées (voir [1] à [10]).

Dans cette note nous considérons respectivement le dernier et le premier instant, avant et après un temps déterministe T, où le processus $(U_t)_{t\geqslant 0}$ atteint la droite $\{a\}\times\mathbb{R}$,

$$\tau_{a,T}^- = \max\{t\in[0,\,T]:\, X_t = a\}\ , \qquad \tau_{a,T}^+ = \min\{t\geqslant T:\, X_t = a\}$$

(avec les conventions usuelles $\max\emptyset = -\infty$, $\min\emptyset = +\infty$).

Nous désignerons par θ_t la translation opérant sur les trajectoires du processus $(U_t)_{t\geqslant 0}$ de la manière suivante:

$$U_s\circ\theta_t = U_{s+t}\,,$$

et par τ_a le premier instant d'atteinte de la droite $\{a\}\times\mathbb{R}$ par le processus $(U_t)_{t\geqslant 0}$,

$$\tau_a = \min\{t > 0:\, X_t = a\}\ .$$

Correspondence to: Aimé Lachal, Institut de Mathématiques et Informatique, 43 boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France.

SSDI 0304-4149(93)E0005-Y

Partant de l'équivalence essentielle

$$(\tau_{a,T}^{-} < s,\ \tau_{a,T}^{+} > t,\ B_{\tau_{a,T}^{+}} \in C) \ \Leftrightarrow\ (\tau_a \circ \theta_s > t-s,\ B_{\tau_a} \circ \theta_s \in C)\ , \tag{1}$$

C désignant un borélien de $\mathbb{R}$, nous allons obtenir la distribution conjointe du triplet $(\tau_{a,T}^{-},\ \tau_{a,T}^{+},\ B_{\tau_{a,T}^{+}})$, puis en déduire les lois du couple $(\tau_{a,T}^{-},\ \tau_{a,T}^{+})$ et de la variable aléatoire $\tau_{a,T}^{-}$. Nous examinerons enfin le cas particulier où $(x, y) = (0, 0)$ et $a = 0$.

Introduisons auparavant quelques notations utiles pour la suite. Notons $P_{(x,y)}$ la probabilité associée au processus $(U_t)_{t\geqslant 0}$ vérifiant $P_{(x,y)}\{U_0 = (x, y)\} = 1$. Les densités de transition $p_t(x, y; u, v)$ du processus markovien temporellement homogène $(U_t)_{t\geqslant 0}$ sont définies selon [6,9]:

$$\begin{aligned} p_t(x, y; u, v) &= P_{(x,y)}\{U_t \in \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\}/\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi t^2} \exp\left[-\frac{6}{t^3}(u-x-ty)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{6}{t^2}(u-x-ty)(v-y) - \frac{2}{t}(v-y)^2 \right]. \end{aligned}$$

Le semi-groupe naturellement associé au processus $(U_t)_{t\geqslant 0}$,

$$(T_t f)(x, y) = \mathbb{E}_{(x,y)}[f(U_t)]\ ,$$

admet pour générateur infinitésimal l'opérateur aux dérivées partielles

$$D_{(x,y)} = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,.$$

Nous introduisons également l'opérateur adjoint,

$$D^*_{(x,y)} = -y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\,,$$

intervenant dans l'équation de Fokker–Planck, satisfaite par les probabilités de transition, suivante:

$$D^*_{(u,v)}\, p_t(x, y; u, v) = \frac{\partial}{\partial t}\, p_t(x, y; u, v)\ . \tag{2}$$

Soient enfin:

(i) $\tau_a = \min\{t > 0 : X_t = a\}$,

(ii) $\tau_{a,T}^{-} = \max\{t \in [0, T] : X_t = a\}$,

(iii) $\tau_{a,T}^{+} = \min\{t \geqslant T : X_t = a\}$.

Nous rappelons deux résultats essentiels, obtenus dans un travail antérieur [2,3], à propos du premier instant de passage en a du processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$:

Proposition 1. *La densité* $f_{a,t}(x, y; z) = P_{(x,y)}\{\tau_a \in \mathrm{d}t,\ B_{\tau_a} \in \mathrm{d}z\}/\mathrm{d}t\ \mathrm{d}z$ *du couple* (τ_a, B_{τ_a}) *s'explicite selon la formule*

$$f_{a,t}(x,y;z)=|z|\left[p_t(x,y;a,z)\right.$$

$$\left.-\int_0^t\int_0^{+\infty} f_s(-|z|;\zeta)p_{t-s}(x,y;a,-\varepsilon\zeta)\right]\mathbb{1}_A(z) \tag{3}$$

où f_s désigne la densité du 'premier instant de retour à l'origine' de McKean [9]:

$$f_s(z;\zeta)=P_{(0,z)}\{\tau_0\in \mathrm{d}s,\ B_{\tau_0}\in \mathrm{d}\zeta\}/\mathrm{d}s\ \mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{3|\zeta|}{\pi\sqrt{2}\,s^2}\,\mathrm{e}^{-(2/s)(\zeta^2-|z\zeta|+z^2)}\int_0^{4|z\zeta|/s}\mathrm{e}^{-3\theta/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}\ \mathbb{1}_{A_z}(\zeta)\,,$$

$$A=\begin{cases}]0,+\infty[& si\ x<a,\\ ]-\infty,0[& si\ x>a,\end{cases}\qquad A_z=\begin{cases}]0,+\infty[& si\ z<0,\\ ]-\infty,0[& si\ z>0,\end{cases}$$

$\varepsilon=$ *signe de* $(a-x)$. □

Proposition 2. *La fonction $f_{a,t}(x,y;z)$ est solution de l'équation de Kolmogorov*:

$$D_{(x,y)}f_{a,t}(x,y;z)=\frac{\partial}{\partial t}f_{a,t}(x,y;z),\quad t>0,\ x\neq a,\ y\in\mathbb{R},\ z\in A. \qquad □ \tag{4}$$

2. La loi conjointe du triplet $(\tau^-_{a,T},\tau^+_{a,T},B_{\tau^+_{a,T}})$

Notre premier résultat s'énonce comme suit:

Théorème. *La distribution conjointe de triplet $(\tau^-_{a,T},\tau^+_{a,T},B_{\tau^+_{a,T}})$ admet la représentation intégrale suivante*:

$$P_{(x,y)}\{\tau^-_{a,T}\in\mathrm{d}s,\ \tau^+_{a,T}\in\mathrm{d}t,\ B_{\tau^+_{a,T}}\in\mathrm{d}z\}$$
$$=\left[\int_{A_z} f_{t-s}(v;z)p_s(x,y;a,v)|v|\ \mathrm{d}v\right]\mathbb{1}_{]0,T[}(s)\,\mathbb{1}_{]T,+\infty[}(t)\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}z\,. \tag{5}$$

Preuve. Partant de l'équivalence fondamentale (1), nous obtenons une écriture intégrale intermédiaire de la loi de $(\tau^-_{a,T},\tau^+_{a,T},B_{\tau^+_{a,T}})$.

Lemme. *On a pour $s\in\ ]0,T[$ l'identité suivante*:

$$P_{(x,y)}\{\tau^-_{a,T}<s,\ \tau^+_{a,T}\in\mathrm{d}t,\ B_{\tau^+_{a,T}}\in\mathrm{d}z\}$$
$$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p_s(x,y;u,v)f_{a,t-s}(u,v;z)\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\right]\mathbb{1}_{]T,+\infty[}(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}z\,. \tag{5'}$$

Preuve. La propriété de Markov du processus $(U_t)_{t\geqslant 0}$ appliquée à l'égalité ensembliste (valable pour $0<s<T<t$)

$$\{\tau_{a,T}^- < s,\ \tau_{a,T}^+ > t,\ B_{\tau_{a,T}^+} \in C\} = \{\tau_a > t-s,\ B_{\tau_a} \in C\} \circ \theta_s\,,$$

C désignant un borélien de $\mathbb{R}$, nous donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned} &P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- < s,\ \tau_{a,T}^+ > t,\ B_{\tau_{a,T}^+} \in C\} \\ &= E_{(x,y)}[P_{U_s}\{\tau_a > t-s,\ B_{\tau_a} \in C\}] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x,y;u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \int_{t-s}^{+\infty}\int_C f_{a,\sigma}(u,v;z)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}z\,. \end{aligned}$$

Une dérivation de cette dernière égalité par rapport à t fournit le résultat annoncé (5′). □

Preuve du théorème (suite). Faisant appel aux équations aux dérivées partielles (2) et (4) respectivement vérifiées par $p_t(x,y;u,v)$ et $f_{a,t}(u,v;z)$, nous réduisons la quantité (5′), après l'avoir dérivée par rapport à s. Ceci donne pour $0<s<T<t$,

$$\begin{aligned} &P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in \mathrm{d}s,\ \tau_{a,T}^+ \in \mathrm{d}t,\ B_{\tau_{a,T}^+} \in \mathrm{d}z\}/\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big[f_{a,t-s}(u,v;z)\frac{\partial}{\partial s}p_s(x,y;u,v) \\ &\qquad + p_s(x,y;u,v)\frac{\partial}{\partial s}(f_{a,t-s}(u,v;z))\Big]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [f_{a,t-s}(u,v;z)D^*_{(u,v)}p_s(x,y;u,v) \\ &\qquad - p_s(x,y;u,v)D_{(u,v)}f_{a,t-s}(u,v;z)]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,. \end{aligned}$$

L'identité élémentaire

$$\varphi D^*\psi - \psi D\varphi = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\varphi\frac{\partial\psi}{\partial v} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right] - v\frac{\partial}{\partial u}[\varphi\psi]$$

nous conduit, en prenant soin d'intégrer par rapport à la variable u séparément sur les intervalles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ (du fait de la singularité en $u=a$ de la fonction $f_{a,t}(u,v;z)$), à une expression plus simple de la densité de $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$:

$$\begin{aligned} &P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in \mathrm{d}s,\ \tau_{a,T}^+ \in \mathrm{d}t,\ B_{\tau_{a,T}^+} \in \mathrm{d}z\}/\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x,y;a,v)[f_{a,t-s}(a^+,v;z) - f_{a,t-s}(a^-,v;z)]v\,\mathrm{d}v\,. \end{aligned}$$

En observant que l'on a nécessairement:

(i) si $v>0$,

$$P_{(a^+,v)}\{\tau_a \in \mathrm{d}t,\, B_{\tau_a} \in \mathrm{d}z\} = P_{(a,v)}\{\tau_a \in \mathrm{d}t,\, B_{\tau_a} \in \mathrm{d}z\}\, \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(z)$$

et

$$P_{(a^-,v)}\{\tau_a \in \mathrm{d}t,\, B_{\tau_a} \in \mathrm{d}z\} = 0\ ;$$

(ii) si $v<0$,

$$P_{(a^-,v)}\{\tau_a \in \mathrm{d}t,\, B_{\tau_a} \in \mathrm{d}z\} = P_{(a,v)}\{\tau_a \in \mathrm{d}t,\, B_{\tau_a} \in \mathrm{d}z\}\, \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)$$

et

$$P_{(a^+,v)}\{\tau_a \in \mathrm{d}t,\, B_{\tau_a} \in \mathrm{d}z\} = 0\ ;$$

(ce qui résulte du mouvement 'rotationnel orienté' des trajectoires du processus $(U_t)_{t\geqslant 0}$ [3,9]), nous ramenons (5″) à une intégrale restreinte à l'intervalle A_z. On conclut finalement en remarquant que l'on a

$$P_{(a,v)}\{\tau_a \in \mathrm{d}t,\, B_{\tau_a} \in \mathrm{d}z\} = P_{(0,v)}\{\tau_0 \in \mathrm{d}t,\, B_{\tau_0} \in \mathrm{d}z\} = f_t(v, z)\, \mathbb{1}_{A_z}(v)\ \mathrm{d}t\, \mathrm{d}z\,. \qquad \square$$

Corollaire 1. *Introduisons les notations suivantes:*

$$g_t(v) = P_{(0,v)}\{\tau_0 \in \mathrm{d}t\}/\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_t(-|v|;\, z)\ \mathrm{d}z\,,$$

$$h_t(v) = P_{(0,v)}\{\tau_0 > t\} = \int_t^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_\sigma(-|v|;\, z)\ \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}z\,,$$

$$\pi_t(x, y;\, u, v) = p_t(x, y;\, u, v) + p_t(x, y;\, u, -v)\,.$$

Nous avons les deux résultats suivants:

(i) *La loi conjointe du couple* $(\tau_{a,T}^-, \tau_{a,T}^+)$ *s'exprime selon la formule suivante:*

$$P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in \mathrm{d}s,\, \tau_{a,T}^+ \in \mathrm{d}t\}$$
$$= \left[\int_0^{+\infty} g_{t-s}(v)\, \pi_s(x, y;\, a, v)\, v\ \mathrm{d}v\right] \mathbb{1}_{]0,T[}(s)\, \mathbb{1}_{]T,+\infty[}(t)\ \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t\,. \tag{6}$$

(ii) *La distribution de la variable aléatoire* $\tau_{a,T}^-$ *admet la représentation suivante:*

$$P_{(x,y)}\{\tau_{a,T}^- \in \mathrm{d}s\} = \left[\int_0^{+\infty} h_{t-s}(v)\, \pi_s(x, y;\, a, v)\, v\ \mathrm{d}v\right] \mathbb{1}_{]0,T[}(s)\ \mathrm{d}s\,. \tag{7}$$

Preuve. (i) En intégrant (5) par rapport à z et en permutant les intégrales ainsi obtenues, on trouve successivement (après avoir noté l'équivalence évidente $v \in A_z \Leftrightarrow z \in A_v$), pour $0<s<T<t$,

$$\begin{aligned}P_{(x,y)}\{\tau^-_{a,T}\in \mathrm{d}s,\ \tau^+_{a,T}\in \mathrm{d}t\}/\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z\int_{A_z} f_{t-s}(v;z)p_s(x,y;a,v)\,|v|\,\mathrm{d}v\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_s(x,y;a,v)\,|v|\,\mathrm{d}v\int_{A_v} f_{t-s}(v;z)\,\mathrm{d}z\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_{t-s}(v)p_s(x,y;a,v)\,|v|\,\mathrm{d}v\,.\end{aligned}$$

La première distribution recherchée (6) se déduit de cette dernière égalité en notant la parité de la fonction $v\mapsto g_t(v)$.

(ii) On obtient immédiatement la loi (7) en intégrant (6) par rapport à t sur $]T,+\infty[$. □

Dans le cas particulier où $(x,y)=(0,0)$ et $a=0$, nous avons plus explicitement:

Corollaire 2. 1(i) *La distribution du couple* $(\tau^-_{0,T},\ \tau^+_{0,T})$ *relativement à la probabilité* $P_{(0,0)}$ *admet pour densité, pour* $0<s<T<t$,

$$P_{(0,0)}\{\tau^-_{0,T}\in \mathrm{d}s,\ \tau^+_{0,T}\in \mathrm{d}t\}/\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \frac{3\sqrt{6}}{\pi^2 s^2}\int_0^{+\infty} K_0\left(4z\sqrt{\frac{t}{s}}\right)\mathrm{e}^{2z}z\,\mathrm{d}z\int_0^{4z}\mathrm{e}^{-3\theta/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}. \tag{8}$$

(ii) *Pour* $0<s<T<t$ *on a*,

$$P_{(0,0)}\{\tau^-_{0,T}<s,\ \tau^+_{0,T}>t\} = \frac{(\frac{3}{2})^{3/2}}{\pi^2}\int_0^{+\infty} K_0\left(4z\sqrt{\frac{t}{s}}\right)\mathrm{e}^{2z}\frac{\mathrm{d}z}{z}\int_0^{4z}\mathrm{e}^{-3\theta/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}. \tag{8'}$$

2(i) *La loi de la variable alétoire* $\tau^-_{0,T}$ *(sous* $P_{(0,0)}$*) admet pour densité, pour* $t\in\,]0,T[$,

$$P_{(0,0)}\{\tau^-_{0,T}\in \mathrm{d}s\}/\mathrm{d}s = \frac{3^{3/2}\sqrt{T}}{\pi^2\sqrt{2}\,s^{3/2}}\int_0^{+\infty} K_1\left(4z\sqrt{\frac{T}{s}}\right)\mathrm{e}^{2z}\,\mathrm{d}z\int_0^{4z}\mathrm{e}^{-3\theta/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}. \tag{9}$$

(ii) *La fonction de répartition de* $\tau^-_{0,T}$ *s'exprime, pour* $s\in\,]0,T[$, *selon la formule*

$$P_{(0,0)}\{\tau^-_{0,T}<s\} = \frac{(\frac{3}{2})^{3/2}}{\pi^2}\int_0^{+\infty} K_0\left(4z\sqrt{\frac{T}{s}}\right)\mathrm{e}^{2z}\frac{\mathrm{d}z}{z}\int_0^{4z}\mathrm{e}^{-3\theta/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}, \tag{9'}$$

K_0 *et* K_1 *désignant les fonctions de Bessel modifiées usuelles* [11].

Preuve. 1(i) En remplaçant dans l'égalité (6) les fonctions $g_{t-s}(v)$ et $\pi_s(0,0;0,v)$ par leurs valeurs explicites, nous obtenons

$$P_{(0,0)}\{\tau_{0,T}^- \in \mathrm{d}s,\ \tau_{0,T}^+ \in \mathrm{d}t\}/\mathrm{d}s\ \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\sqrt{3}\, v}{\pi s^2} \mathrm{e}^{-2v^2/s}\, \mathrm{d}v \int_0^{+\infty} \frac{3z}{\pi\sqrt{2}(t-s)^2} \mathrm{e}^{-(2/(t-s))(v^2-vz+z^2)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}z$$

$$\times \int_0^{4vz/(t-s)} \mathrm{e}^{-3\theta/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}$$

$$= \frac{3\sqrt{6}}{\pi^2 s^2 (t-s)^2} \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} vz\, \mathrm{e}^{-(2/(t-s))((t/s)v^2-vz+z^2)}\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}z$$

$$\times \int_0^{4vz/(t-s)} \mathrm{e}^{-3\theta/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

Le changement de variables, dans l'intégrale double, $(v,\ z) \mapsto (w,\ \zeta)$ défini par $v = \sqrt{t-s}\, w$ et $z = \sqrt{t-s}\, \zeta / w$ nous conduit à l'égalité:

$$P_{(0,0)}\{\tau_{0,T}^- \in \mathrm{d}s,\ \tau_{0,T}^+ \in \mathrm{d}t\}/\mathrm{d}s\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{3\sqrt{6}}{\pi^2 s^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2\zeta} \zeta\, \mathrm{d}\zeta \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2((t/s)w^2+\zeta^2/w)} \frac{\mathrm{d}w}{w} \int_0^{4\zeta} \mathrm{e}^{-3\theta/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi\theta}}.$$

L'intégrale intermédiaire s'exprime à l'aide de la fonction K_0 [11, formule 15, p. 183] selon

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-((t/s)w^2+\zeta^2/w)} \frac{\mathrm{d}w}{w} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2((t/s)\eta+\zeta^2/\eta)} \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta} = K_0\left(4z\sqrt{\frac{t}{s}}\right),$$

ce qui permet de conclure.

1(ii) Intégrons l'identité (8) par rapport à s et t. Pour en tirer la formule (8′) il suffit de voir que l'on a les identités successives suivantes:

$$\int_0^s \int_t^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2} K_0\left(4z\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}\right) \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau = \int_0^s \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^2} \int_t^{+\infty} K_0\left(4z\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}\right) \mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{\sqrt{t}}{2z} \int_0^s K_1\left(4z\sqrt{\frac{t}{\sigma}}\right) \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{4z^2} K_0\left(4z\sqrt{\frac{t}{s}}\right),$$

la deuxième égalité se déduisant des relations bien connues [11]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xK_1(x)) = -xK_0(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} xK_1(x) = 0,$$

et la dernière de

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(K_0(x)) = -K_1(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} K_0(x) = 0 .$$

2. La fonction de répartition (9′) de $\tau_{0,T}^-$ se déduit de (8′) en remarquant que l'on a

$$P_{(0,0)}\{\tau_{0,T}^- < s\} = P_{(0,0)}\{\tau_{0,T}^- < s,\ \tau_{0,T}^+ > T\} .$$

Enfin, dérivons la formule (9′) par rapport à s. Nous obtenons, en faisant appel à la relation $K_0' = -K_1$ [11], la densité (9) de $\tau_{0,T}^-$. □

Remarque. Le procédé utilisé dans cet article, à savoir l'exploitation de l'équivalence (1), ne permet pas de déterminer la loi du couple $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-})$, ni celle du quadruplet $(\tau_{a,T}^-, B_{\tau_{a,T}^-}, \tau_{a,T}^+, B_{\tau_{a,T}^+})$. Néanmoins, nous avons récemment obtenu par une technique différente l'expression de ces distributions; ceci fera l'objet d'une publication ultérieure [5].

Références

[1] M. Kac, Probability theory: its role and its impact, SIAM Rev. 4 (1962) 1–11.

[2] A. Lachal, Sur l'intégrale du mouvement brownien, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 311 (1990) 461–464.

[3] A. Lachal, Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B 27 (3) 1991) 385–405.

[4] A. Lachal, Sur les temps de passages successifs de l'intégrale du mouvement brownien, proposé.

[5] A. Lachal, Sur les excursions de l'intégrale du mouvement brownien, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 314 (1992) 1053–1056.

[6] A. Lachal, Etude des trajectoires de la primitive du mouvement brownien, Thèse de Doctorat.

[7] M. Lefebvre, First passage densities for a two-dimensional process, SIAM J. Appl. Math. 49(5) (1989) 1514–1523.

[8] M. Lefebvre and P. Whittle, Survival optimization for a dynamic system, Ann. Sci. Math. Québec 12(1) (1988) 101–119.

[9] H.P. McKean Jr., A winding problem for a resonator driven by a white noise, J. Math. Kyoto Univ. 2 (1963) 227–235.

[10] S.O. Rice, Mathematical analysis of random noise, Bell. Syst. Tech. J. 23 (1944) 282–332; 24 (1945) 46–156.

[11] G.N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952).